Estadística Empresarial

2. Teoría de la Probabilidad

ÍNDICE

MOTIVACIÓN

Los fenómenos aleatorios pueden dar lugar a diferentes resultados. Cuando se analiza un fenómeno aleatorio, resulta fundamental establecer una medida de la incertidumbre asociada al fenómeno. Dicha medida, que recibe el nombre de probabilidad, toma valores en el intervalo $[0,1]$. Si un suceso es imposible que se presente, se le asignará una probabilidad igual a 0. Si por el contrario, el suceso seguro que se presenta se le asignará una probabilidad igual a 1. Al estudio de dicha medida se dedicará esta Unidad Didáctica.

PROPÓSITOS

Los principales propósitos de esta Unidad Didáctica son:

- Distinguir entre experimentos aleatorios y deterministas.
- Saber determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio.
- Distinguir los diferentes tipos de sucesos.
- Entender las diferentes operaciones que se pueden realizar con los sucesos y aprender a expresar un suceso a partir de otros sucesos.
- Aprender a calcular la probabilidad asociada a un suceso.
- Distinguir entre probabilidades “a priori” y “a posteriori”. Saber calcular las probabilidades “a posteriori”.

PREPARACIÓN PARA LA UNIDAD

Esta unidad didáctica comienza estableciendo la distinción entre experimentos aleatorios y deterministas. A continuación, se presentan los conceptos de espacio muestral y de suceso, así como los tipos de sucesos y las operaciones con los mismos. Seguidamente, se describen diferentes definiciones de probabilidad y se introduce el concepto de probabilidad condicionada. Finalmente, se distingue entre probabilidades “a priori” y “a posteriori” y se presentan dos teoremas que permiten calcular estas últimas.

En esta Unidad Didáctica aprenderás a expresar correctamente cada suceso, utilizar la expresión adecuada para calcular la probabilidad asociada al mismo e interpretar correctamente el resultado obtenido.

1. ESPACIO MUESTRAL Y SUCESOS

Un experimento es cualquier proceso que da lugar a uno o a varios resultados.

Se distinguen dos tipos de experimentos:

- **Experimentos deterministas**: siempre que se realizan en las mismas condiciones dan lugar al mismo resultado. Por ejemplo, si se combinan dos átomos de hidrógeno y uno de oxigeno, se obtiene siempre una molécula de agua.
- **Experimentos aleatorios**: no podemos predecir el resultado aunque se repitan en las mismas condiciones. Por ejemplo, si se lanza una moneda una vez, se pueden obtener dos posibles resultados cara y cruz.
- **El espacio muestral**: es el conjunto cuyos elementos son los posibles resultados del experimento aleatorio. Se representará por la letra E.

Ejemplo 1. Determinar los espacios muestrales de los siguientes experimentos aleatorios:

1. Lanzamiento de una moneda una vez.
2. Lanzamiento de un dado una vez.
3. Lanzamiento de una moneda dos veces.

1. Lanzamiento de una moneda una vez.

$$E = \{C, X\}$$

2. Lanzamiento de un dado una vez.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3. Lanzamiento de una moneda dos veces.

$$E = \{(C, C), (C, X), (X, C), (X, X)\}$$

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Se representan por letras mayúsculas $A, B, C\ldots$.

Hay dos formas de expresar los sucesos:

- **Por comprensión**: se indica una frase o expresión que permite conocer todos los elementos que componen el suceso.
- **Por extensión**: se indican todos los elementos que componen el suceso.

Ejemplo 2. Se lanza un dado una vez. Se considera el suceso que salga un número par. Expresar dicho suceso por comprensión y por extensión.

El suceso se representará por la letra A.

Su definición por comprensión será: $A = "Salir\ par"$ y por extensión $A = \{2,4,6\}$.

Se distinguen las siguientes clases de sucesos: suceso elemental, compuesto, seguro, imposible, contrario y condicionado. A continuación, se explicará cada uno de ellos.

- **Suceso elemental**: es el que está formado por un solo elemento del espacio muestral.
- **Suceso compuesto**: es el que está formado por varios elementos del espacio muestral.

- **Suceso seguro**: está formado por todos los posibles resultados del experimento. Es el espacio muestral.
- **Suceso imposible**: es el que no se presenta nunca. Se representará por ϕ.
- **Suceso contrario o complementario**: dado un suceso A, el suceso contrario o complementario de A, que se representará por $\overline{A}$, consiste en la no presentación del suceso A.

Ejemplo 4. Se lanza un dado una vez.

Sea $A = "Salir\ 1"$. El suceso contrario de A está formado por los sucesos elementales que no pertenecen a A.

$\overline{A} = \{2,3,4,5,6\}$

- **Suceso condicionado**: dados dos sucesos A y B, el suceso A condicionado a B, que se representará por A/B, consiste en la presentación del suceso A si previamente se ha presentado el suceso B.

Ejemplo 5. Se lanza un dado una vez.

Sea $A = "Salir\ 6"$ y $B = "Salir\ par"$. El suceso salir 6 si se sabe que ha salido par es el suceso A condicionado a B y se representa por A/B.

2. OPERACIONES CON SUCESOS

Las principales operaciones que se pueden realizar con sucesos son la unión y la intersección. En esta sección se explicará en que consisten cada una de ellas.

UNIÓN DE SUCESOS. Dados dos sucesos A y B, la unión que se representará por $A \cup B$, es un suceso formado por los sucesos elementales que pertenecen sólo a A, sólo a B y los sucesos comunes.

Ejemplo 6. Se lanza un dado una vez. Consideramos los siguientes sucesos: $A = \{1,2\}$ y $B = \{2,4,6\}$.

La unión es $A \cup B = \{1,2,4,6\}$.

La unión de un suceso y su contrario siempre es igual al espacio muestral.

$$A \cup \overline{A} = E$$

INTERSECCIÓN DE SUCESOS. Dados dos sucesos A y B, la intersección, que se representará por $A \cap B$, es un suceso formado por los sucesos comunes a ambos.

Ejemplo 7. Se lanza un dado una vez. Consideramos los siguientes sucesos: $A = \{1,2\}$ y $B = \{2,4,6\}$. La intersección es $A \cap B = \{2\}$.

A continuación, se presenta la definición de sucesos incompatibles y compatibles que está basada en la intersección de sucesos

- **Sucesos incompatibles**: Dos sucesos A y B son incompatibles si no tienen elementos en común, es decir, si su intersección es igual al suceso imposible $A \cap B = \phi$.

Un suceso y su contrario son incompatibles.

$A \cap \overline{A} = \phi$

- **Sucesos compatibles**: Dos sucesos A y B son compatibles si tienen elementos en común, es decir, si su intersección es distinta del suceso imposible $A \cap B \neq \phi$.

Ejemplo 8. Se lanza un dado una vez. Consideramos los siguientes sucesos:

a) $A = \{1,2\}$ y $B = \{2,4,6\}$. Los sucesos tienen elementos en común. La intersección es $A \cap B = \{2\} \neq \phi$. Por tanto, los sucesos A y B son compatibles.

b) $A = \{1,2\}$ y $B = \{4,6\}$. Los sucesos no tienen elementos en común. La intersección es $A \cap B = \phi$. Por tanto, los sucesos A y B son incompatibles.

3. DEFINICIONES DE PROBABILIDAD

La probabilidad es una medida de la incertidumbre asociada a los fenómenos que dependen del azar. La probabilidad de un suceso A se representará por $P(A)$. Dicha medida toma valores en el intervalo $[0,1]$. Si un suceso es imposible que se presente, se le asignará una probabilidad igual a 0. Si por el contrario, el suceso seguro que se presenta se le asignará una probabilidad igual a 1. Existen diferentes definiciones de probabilidad.

A continuación, se presentan las definiciones de probabilidad que tienen mayor aplicación práctica: la definición frecuencial, la definición de Laplace y la definición axiomática.

DEFINICIÓN FRECUENCIAL DE PROBABILIDAD

Sea A un suceso cualquiera. Se define la frecuencia relativa de ese suceso como el cociente del número de veces que se presenta el suceso y el número de veces que se realiza el experimento.

$$fr(A) = \frac{n^{o}\ de\ veces\ que\ se\ presenta\ el\ suceso}{n^{o}\ de\ veces\ que\ se\ realiza\ el\ experimento}$$

La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un valor a medida que el número de veces que se realiza el experimento crece indefinidamente. A ese valor se le llama probabilidad del suceso A.

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} fr(A)$$

Siendo n el número de veces que se realiza el experimento.

Esta definición tiene dos inconvenientes:

1. Hay que repetir el experimento un gran número de veces.
2. El resultado que se obtiene es aproximado.

DEFINICIÓN DE LAPLACE

Laplace define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{n^o \, de \, casos \; favorables}{n^o \, de \, casos \, posibles}$$

Esta definición presenta el inconveniente de que sólo se puede aplicar cuando los sucesos elementales son igualmente probables.

Ejemplo 9. Se lanza un dado una vez. Determinar la probabilidad de obtener un número par.

El suceso se representará por la letra A.

$$A = "Salir \; par" = \{2,4,6\}.$$

Los sucesos elementales son igualmente probables, por lo que podemos utilizar la definición de Laplace para obtener la probabilidad de A.

Los casos favorables son 3 (los elementos que componen el suceso A) y los casos posibles son 6 (los elementos del espacio muestral).

Por tanto,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

La probabilidad es una función que asocia a cada suceso A un número real que llamamos probabilidad de A. Dicha función verifica los siguientes axiomas:

Axioma 1. La probabilidad de cualquier suceso es siempre mayor o igual que cero.

$$P(A) \geq 0$$

Axioma 2. La probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad.

$$P(E) = 1$$

Axioma 3. La probabilidad la unión de sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades.

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ sucesos incompatibles $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS

a) La probabilidad del suceso contrario es:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

b) La probabilidad del suceso imposible es igual a 0.

$$P(\phi) = 0$$

c) La probabilidad de cualquier suceso es siempre menor o igual que 0.

$$P(A) \leq 1$$

A partir del axioma 1 y de la consecuencia c) se deduce que $0 \leq P(A) \leq 1$.

d) Sean A y B dos sucesos compatibles, $A \cap B \neq \phi$, entonces se tiene que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo 10. Supongamos un dado defectuoso de tal forma que la probabilidad de obtener cualquiera de los impares es la misma en los tres casos e igual a 1/9 y la probabilidad de obtener cualquiera de los pares también es la misma en los tres casos e igual a 2/9. Determinar la probabilidad de obtener un número par.

El suceso se representará por la letra A.

$$A = \text{"}Salir\ \ par\text{"} = \{2, 4, 6\}$$

Los sucesos elementales no son igualmente probables, por lo que no podemos utilizar la definición de Laplace para obtener la probabilidad de A. Se empleará la definición axiomática de probabilidad.

$$P(A) = P(2 \cup 4 \cup 6) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$$

Para calcular esta probabilidad se ha tenido en cuenta que la probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de probabilidades (Axioma3).

Obsérvese que si el dado no estuviese trucado también se puede utilizar la definición axiomática para calcular la probabilidad del suceso A. En ese caso,

$$P(A) = P(2 \cup 4 \cup 6) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

4. PROBABILIDAD CONDICIONADA

Como se expuso en la sección 1, el suceso A condicionado a B, que se representará por A/B, consiste en la presentación del suceso A si previamente se ha presentado el suceso B. En esta sección se define la probabilidad de un suceso condicionado.

La probabilidad de A condicionado a B se define de la siguiente forma:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0$$

La probabilidad de B condicionado a A se define de la siguiente forma:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P(A) \neq 0$$

Ejemplo 11. Se lanza un dado una vez. Si se sabe que ha salido par, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido un 6?

Sea $A = \text{"}Salir\ 6\text{"} = \{6\}$ y $B = \text{"}Salir\ par\text{"} = \{2,4,6\}$.

El suceso salir 6 si se sabe que ha salido par es A/B.

Teniendo en cuenta la definición de probabilidad condicionada, se tiene que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Para calcular dicha probabilidad se ha tenido en cuenta que el suceso $A \cap B$ está formado por los elementos comunes y por tanto, en este ejemplo, $A \cap B = A = \{6\}$.

A continuación, se presenta la definición de sucesos independientes y dependientes que está basada en la probabilidad condicionada.

- **Sucesos independientes**. Dos sucesos A y B son independientes si el que se haya presentado uno de ellos no modifica la probabilidad de que se presente el otro, es decir:

$$P(A/B) = P(A) \qquad\qquad P(B/A) = P(B)$$

- **Sucesos dependientes**. Dos sucesos A y B son dependientes si el que se haya presentado uno de ellos modifica la probabilidad de que se presente el otro, es decir:

$$P(A/B) \neq P(A) \qquad\qquad P(B/A) \neq P(B)$$

Ejemplo 12. Una urna tiene dos bolas blancas y tres rojas. Se extraen dos bolas.

Se consideran los siguientes sucesos:

B_1 = "La primera bola extraída es blanca"

R_2 = "La segunda bola extraída es roja"

Razone si los sucesos B_1 y R_2 son independientes en los siguientes casos:

a) Las extracciones son con reemplazamiento.
b) Las extracciones son sin reemplazamiento.

a) Si las extracciones son con reemplazamiento (se extrae una bola, se vuelve a introducir, y se extrae la otra bola), los sucesos B_1 y R_2 son independientes. El que se haya presentado el suceso B_1 no modifica la probabilidad de que se presente el suceso R_2, puesto que la bola que se saca en la primera extracción se vuelve a introducir en la urna, y por tanto, la composición de la urna no cambia.

b) Si las extracciones son sin reemplazamiento, los sucesos B_1 y R_2 son dependientes. El que se haya presentado el suceso B_1 modifica la probabilidad de que se presente el suceso R_2, puesto que la bola que se saca en la primera extracción no se vuelve a introducir en la urna y por tanto, la composición de la urna cambia.

5. PROBABILIDAD DE LA INTERSECCIÓN DE SUCESOS

La probabilidad de la intersección de sucesos se deduce de la definición de probabilidad condicionada. En esta sección se determina dicha probabilidad. Se distinguen dos casos: sucesos independientes y sucesos dependientes.

SUCESOS DEPENDIENTES

Sean A y B dos sucesos dependientes, entonces se tiene que:

$$P(A \cap B) = P(A/B)\, P(B) = P(B/A)\, P(A)$$

Demostración:

Se parte de la definición de probabilidad condicionada. Se despeja la probabilidad de la intersección y se obtienen las dos expresiones.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B)\, P(B)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \Rightarrow P(A \cap B) = P(B/A)\, P(A)$$

Si se consideran tres sucesos, A, B y C dependientes, se tiene que:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B/A)\, P(C/A \cap B)$$

Ejemplo 13. Una urna tiene dos bolas blancas y tres rojas. Se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Determinar la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda roja.

Se consideran los siguientes sucesos:

B_1 = "La primera bola extraída es blanca"

R_2 = "La segunda bola extraída es roja"

El suceso obtener bola blanca en la primera extracción y bola roja en la segunda es el suceso $B_1 \cap R_2$.

Como las extracciones son sin reemplazamiento, los sucesos B_1 y R_2 son dependientes.

Por tanto,

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P\left(R_2 / B_1\right) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

SUCESOS INDEPENDIENTES

Sean A y B dos sucesos independientes, entonces se tiene que:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Demostración:

Se parte de la definición de probabilidad condicionada. Se despeja la probabilidad de la intersección y se tiene en cuenta que los sucesos A y B son independientes y por tanto $P(A/B) = P(A)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B)\, P(B) = P(A)\, P(B)$$

Este resultado se puede generalizar para cualquier conjunto finito de sucesos.

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ sucesos independientes, entonces se tiene que:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2)...P(A_n)$$

Ejemplo 14. Una urna tiene dos bolas blancas y tres rojas. Se extraen dos bolas con reemplazamiento. Determinar la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda roja.

Se consideran los siguientes sucesos:

B_1 = “La primera bola extraída es blanca”

R_2 = “La segunda bola extraída es roja”

Como las extracciones son con reemplazamiento, los sucesos B_1 y R_2 son independientes. Por tanto,

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P(R_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

6. PROBABILIDADES A PRIORI Y A POSTERIORI

Consideramos un suceso H. La probabilidad que asignamos inicialmente al suceso H, que se representará por $P(H)$, se denomina probabilidad “a priori”.

Supongamos que posteriormente disponemos de cierta información, que se representará por X, que afecta al suceso H. La probabilidad de H condicionada a X, que se representará por $P\left(H/X\right)$, se denomina probabilidad “a posteriori”.

A continuación, se enuncian dos teoremas que permiten calcular las probabilidades “a posteriori”.

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sean $H_1, H_{2,\ldots,} H_k$ una colección de sucesos tales que son incompatibles $H_i \cap H_j = \phi$ y su unión es igual al espacio muestral $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = E$. Sea X un suceso cualquiera entonces se verifica que:

$$P(X) = \sum_{i=1}^{k} P(X/H_i)P(H_i)$$

Ejemplo 15. Para obtener un determinado tipo de piezas en cierta fábrica se utilizan tres máquinas. La máquina A obtiene el 50% de las piezas, la maquina B el 30 % y la maquina C el resto. Se estima que son defectuosas el 1% de las piezas fabricadas por A, el 2% de las producidas por B y el 2,5 % de las de C. Se elige una pieza al azar. Obtener la probabilidad de que sea defectuosa.

Se consideran los siguientes sucesos:

$H_A = \text{"} La\ pieza\ es\ fabricada\ por\ la\ máquina\ A \text{"}$

$H_B = \text{"} La\ pieza\ es\ fabricada\ por\ la\ máquina\ B \text{"}$

$H_c = \text{"} La\ pieza\ es\ fabricada\ por\ la\ máquina\ C \text{"}$

$X = \text{"} La\ pieza\ es\ defectuosa \text{"}$

El problema nos proporciona las siguientes probabilidades.

$$P(H_A) = 0{,}5 \qquad P(H_B) = 0{,}3 \qquad P(H_c) = 0{,}2$$

$$P\left(X/_{H_A}\right) = 0{,}01 \quad P\left(X/_{H_B}\right) = 0{,}02 \quad P\left(X/_{H_C}\right) = 0{,}025$$

A continuación, se calculará la probabilidad de que una pieza sea defectuosa, para lo cual se emplea el teorema de la probabilidad total. En lugar de emplear directamente la expresión del teorema, la deduciremos.

$$P(X) = P[(X \cap H_A) \cup (X \cap H_B) \cup (X \cap H_c)] =$$

$$= P(X \cap H_A) + P(X \cap H_B) + P(X \cap H_C) =$$

$$= P(X / H_A) P(H_A) + P(X / H_B) P(H_B) + P(X / H_C) P(H_C) =$$

$$= 0{,}01 \times 0{,}5 + 0{,}02 \times 0{,}3 + 0{,}025 \times 0{,}2 = 0{,}016$$

Para deducir la expresión se ha tenido en cuenta que:

1. El suceso “la pieza es defectuosa” está formado por la unión de tres sucesos:

   La pieza es defectuosa y fabricada por la máquina A, es decir, $X \cap H_A$

   La pieza es defectuosa y fabricada por la máquina B, es decir, $X \cap H_B$

   La pieza es defectuosa y fabricada por la máquina C, es decir, $X \cap H_C$

2. Los tres sucesos anteriores son incompatibles. Por tanto, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades (axioma 3).

TEOREMA DE BAYES

Sean $H_1, H_2, ..., H_k$ una colección de sucesos tales que son incompatibles $H_i \cap H_j = \phi$ y su unión es igual al espacio muestral $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = E$. Sea X un suceso cualquiera entonces se verifica que:

$$P(H_i / X) = \frac{P(X / H_i)}{P(X)} P(H_i)$$

El teorema de Bayes nos permite calcular las probabilidades “a posteriori” a partir de las probabilidades “a priori”.

Ejemplo 16. Para obtener un determinado tipo de piezas en cierta fábrica se utilizan tres máquinas. La máquina A obtiene el 50% de las piezas, la maquina B el 30 % y la maquina C el resto. Se estima que son defectuosas el 1% de las piezas fabricadas por A, el 2% de las producidas por B y el 2,5 % de las de C. Se elige una pieza al azar. Si se sabe que es defectuosa, cual es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina B.

Las probabilidades “a priori” son:

$$P(H_A) = 0{,}5 \qquad P(H_B) = 0{,}3 \qquad P(H_c) = 0{,}2$$

Se pide la probabilidad de que si es defectuosa, haya sido fabricada por la máquina B, es decir, $P(H_B / X)$. Dicha probabilidad es una probabilidad “a posteriori”.

Para calcularla se utilizará el teorema de Bayes. En lugar de emplear directamente la expresión del teorema, la deduciremos.

$$P(H_B / X) = \frac{P(X \cap H_B)}{P(X)} = \frac{P(X / H_B)}{P(X)} P(H_B) = \frac{0{,}02}{0{,}016} \times 0{,}3 = 0{,}375$$

La probabilidad de defectuosa se obtuvo en el ejemplo 15.

Para deducir la expresión del teorema se ha tenido en cuenta la definición de probabilidad condicionada.

CUADROS

CUADRO 1. SUCESOS

Espacio muestral	Conjunto cuyos elementos son los posibles resultados del experimento aleatorio.
Suceso	Cualquier subconjunto del espacio muestral.
Clases de sucesos	**Suceso elemental**: es el que está formado por un solo elemento del espacio muestral. **Suceso compuesto**: es el que está formado por varios elementos del espacio muestral. **Suceso seguro**: es el espacio muestral. **Suceso imposible**: es el que no se presenta nunca. **Suceso contrario o complementario**: el suceso contrario o complementario de A consiste en la no presentación del suceso A. **Suceso condicionado**: el suceso A condicionado a B consiste en la presentación del suceso A si previamente se ha presentado el suceso B.
Operaciones con sucesos	Dados dos sucesos A y B **Unión de sucesos**: consiste en la presentación de al menos uno de los dos sucesos. **Intersección de sucesos**: consiste en la presentación de los dos sucesos.
Sucesos incompatibles y compatibles	**Sucesos incompatibles**: No se pueden presentar a la vez. $A \cap B = \phi$ **Sucesos compatibles**: Se pueden presentar a la vez. $A \cap B \neq \phi$

CUADRO 2. PROBABILIDAD

Probabilidad	Medida de la incertidumbre asociada a los fenómenos que dependen del azar.
Probabilidad de la unión	**Sucesos incompatibles** $P(A \cup B) = P(A) + P(B))$ **Sucesos compatibles** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Probabilidad condicionada	$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0$ $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad P(A) \neq 0$
Sucesos independientes y dependientes	**Sucesos independientes**: el que se haya presentado uno de ellos no modifica la probabilidad de que se presente el otro. $P(A/B) = P(A) \qquad P(B/A) = P(B)$ **Sucesos dependientes**: el que se haya presentado uno de ellos modifica la probabilidad de que se presente el otro. $P(A/B) \neq P(A) \qquad P(B/A) \neq P(B)$
Probabilidad de la intersección	**Sucesos dependientes** $P(A \cap B) = P(A/B)\, P(B) = P(B/A)\, P(A)$ **Sucesos independientes** $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

CONCLUSIONES

Cuando se está analizando un fenómeno aleatorio se deben seguir una serie de etapas.

En primer lugar, hay que determinar el conjunto de todos los posibles resultados y las probabilidades asociadas a cada uno de los sucesos elementales que componen dicho conjunto.

A continuación, se tienen que expresar los sucesos compuestos necesarios para el análisis que se está realizando a partir de los sucesos elementales.

Finalmente, se calculan las probabilidades de todos los sucesos de interés para el estudio que se está llevando a cabo y se interpretan los resultados obtenidos.

RECAPITULACIÓN

Se distinguen dos tipos de experimentos:

- **Experimentos deterministas:** siempre que se realizan en las mismas condiciones dan lugar al mismo resultado.
- **Experimentos aleatorios**: no podemos predecir el resultado aunque se repitan en las mismas condiciones.

El **espacio muestral** es el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio.

Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral. Se distinguen dos operaciones fundamentales con sucesos. La unión de dos sucesos que es otro suceso que consiste en la presentación de al menos uno de los dos sucesos y la intersección que es otro suceso que consiste en la presentación de los dos sucesos.

La **probabilidad** es una medida de la incertidumbre asociada a los fenómenos que dependen del azar. Se distinguen diferentes definiciones de probabilidad.

La definición más importante es la definición axiomática de probabilidad. Según esta definición, la probabilidad es una función que asocia a cada suceso A un número real que se denomina probabilidad de A y que verifica tres axiomas.

- **Axioma 1.** La probabilidad de cualquier suceso es siempre mayor o igual que cero.
- **Axioma 2.** La probabilidad del suceso seguro es siempre igual a 1.
- **Axioma 3.** La probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de probabilidades.

AUTOCOMPROBACIÓN

1. El espacio muestral es:
   a) El conjunto de todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio.
   b) Un subconjunto de todos los posibles resultados de un fenómeno aleatorio.
   c) Un fenómeno aleatorio.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

2. Un suceso elemental es el que:
   a) Está formado por un solo elemento muestral.
   b) Está formado por varios elementos del espacio muestral.
   c) No tiene ningún elemento.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

3. Un suceso compuesto es el que:
   a) Está formado por un solo elemento muestral.
   b) Está formado por varios elementos del espacio muestral.
   c) No tiene ningún elemento.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

4. El suceso A condicionado a B consiste en:

   a) La presentación de B si previamente se ha presentado A.
   b) La presentación de A si previamente se ha presentado B.
   c) La presentación de los dos sucesos.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

5. La unión de dos sucesos A y B consiste en:

   a) La presentación de al menos uno de los dos sucesos.
   b) La presentación de sólo uno de los dos sucesos.
   c) La presentación de los dos sucesos.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

6. La intersección de dos sucesos A y B consiste en:

   a) La presentación de al menos uno de los dos sucesos.
   b) La presentación de sólo uno de los dos sucesos.
   c) La presentación de los dos sucesos.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

7. Si dos sucesos A y B son incompatibles entonces:

   a) No se pueden presentar a la vez.
   b) Se pueden presentar a la vez.
   c) El que se haya presentado uno de ellos modifica la probabilidad de que se presente el otro.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

8. Si dos sucesos A y B son independientes entonces:

   a) El que se haya presentado uno de ellos modifica la probabilidad de que se presente el otro.
   b) El que se haya presentado uno de ellos no modifica la probabilidad de que se presente el otro.
   c) No se pueden presentar conjuntamente.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

9. La probabilidad de un suceso A

   a) Puede tomar cualquier valor.
   b) Tomará valores negativos si el fenómeno que se está analizando toma valores negativos.
   c) Es una medida de la incertidumbre asociada a los fenómenos que dependen del azar.
   d) Ninguna respuesta es correcta.

10. La definición de Laplace sólo es válida cuando:

    a) Los sucesos elementales son igualmente probables.
    b) Los sucesos elementales no son igualmente probables.
    c) Siempre es válida.
    d) Ninguna respuesta es correcta.

SOLUCIONARIO

1.	a	2.	a	3.	b	4.	b	5.	a
6.	c	7.	a	8.	b	9.	c	10.	a

PROPUESTAS DE AMPLIACIÓN

Si estás interesado en ampliar los conocimientos sobre la teoría de la probabilidad, puedes consultar el siguiente libro:

Martín Pliego F. J. y Ruiz Maya L. (1997). Estadística I: Probabilidad. Editorial Thomson.

BIBLIOGRAFÍA

Martín Pliego F. J. y Ruiz Maya L. (2006). Fundamentos de Probabilidad. Editorial Thomson.

Peralta Astudillo, M.J., Rúa Vieyes, A., Redondo Palomo, R., y del Campo Campos, C. (2007). Estadística. Problemas resueltos. Editorial Pirámide.